Familles Sommables

I Familles à termes positifs :

<u>Déf</u>: Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels positifs

On note $P_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I,
on dit que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable s'il existe $M \geq 0$

$$\forall J \in P_f(I) \sum_{i\in J} u_i \leq M$$

Dans ce cas : la somme $(u_i)_{i\in I}$ est

$$\underline{\text{Sn}} \qquad \sup\left\{\sum_{i\in J} u_i \;\middle|\; J \text{ finie et } \subset I\right\}$$

si (u_i) n'est pas sommable on convient que

$$\sum_{i\in I} u_i = +\infty$$

<u>Prop</u>: Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, $K = \{i\in I \mid u_i > 0\}$ est dénombrable.

D/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $A_{1/n} = \{i \in I \mid u_i \geq \frac{1}{n}\}$

Supposons $A_{1/n}$ infini. Soit $J \subset A_{1/n}$ tq

$$|J| > \left(\sum_{i\in I} u_i\right) \times n$$

il vient $\displaystyle\sum_{j\in J} u_j \geq \frac{|J|}{n} > \sum_{i\in I} u_i$ abs !

donc chaque ensemble $A_{1/n}$ est fini
donc $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{1/n}$ est dén.

Désormais, on suppose que I est dénombrable

<u>Prop:</u> 1) Domination : Soit $\left| \begin{array}{l} (u_i)_{i\in I} \\ (v_i)_{i\in I} \end{array} \right. \in \mathbb{R}^I$; On suppose que ; $\forall i \ (0 \leq u_i \leq v_i)$

Si (v_i) est sommable, (u_i) aussi
si (u_i) n'est pas sommable, (v_i) aussi

Propriétés des suites exhaustives

Soit J_n une suite croissante de parties finies de I
telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = I$

(u_i) est sommable $\Leftrightarrow S_n = \sum_{i\in J_n} u_i$ est majorée

dans ce cas $\sum_{i\in I} u_i = \lim_{n\to+\infty} S_n$

D/ Obs: $\forall n\in\mathbb{N}, J_n \subset J_{n+1} \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N} \ S_n \leq S_{n+1}$
$\Rightarrow$ Clair par définition. De plus $\forall n\in\mathbb{N} \ S_n \leq \sum_{i\in I} u_i$

$\sup_{J \text{ fini}} \sum_{i\in J} u_i$

alors $\lim_{n\to+\infty} S_n \leq \sum_{i\in I} u_i$

$\Leftarrow$ Soit J fini $\subset I$; il vient $J = I\cap J$
$= \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n\right)\cap J$
$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (J_n \cap J)$

Comme J est fini, il existe $N\in\mathbb{N}$ tq $J_N \cap J = J$ réunion croissante
ie $J \subset J_N$

$\sum_{i\in J} u_i \leq S_N \leq \lim_{n\to+\infty} S_n < +\infty$ hyp

Alors (u_i) est, par définition, sommable et $\sum_{i\in I} u_i \leq \lim_{+\infty} S_n$

3) Soient $\lambda \geq 0$, (u_i) et (v_i) deux famille sommables et $\sum_{i\in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i\in I} u_i$; $\sum_{i\in I} u_i + v_i = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$

D/ On pose $S_n = \sum_{i\in J_n} u_i$, $S'_n = \sum_{i\in J_n} v_i$

$S_n + S'_n = \sum_{i\in J_n} (u_i + v_i)$

Par hyp $S_n \nearrow \underbrace{\sum_{i\in I} u_i}_{=U}$ et $S'_n \nearrow \sum_{i\in I} v_i = V$

donc $S_n + S'_n \nearrow U + V$

avec 2 OK

Partition et sommabilité ("paquets")

Prop: Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, et $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$

Alors $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum u_{\sigma(n)}$ converge, dans ce cas $\sum_0^{+\infty} u_n = \sum_0^{+\infty} u_{\sigma(n)}$

D/ $\Downarrow$ Soit $N \in \mathbb{N}$ $u_{\sigma(0)} + \dots + u_{\sigma(N)} \leq \sum_{n=0}^{\max(\sigma k \mid 0 \leq k \leq N)} u_n$

$\leq \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n}_{\text{fini}}$

$\sum u_{\sigma(n)}$ étant à termes positifs ~~étant à termes positifs~~, elle converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

(⇑) On envisage $v_n = u_{\sigma(n)}$, d'où $v_{\sigma^{-1}(n)} = u_n$

On applique le résultat précédent.

on a
$\sum_{\geq 0} u_n$ CV $\Leftrightarrow$ (u_n) est sommable.

[illegible] → Th (Associativité) Soit $(u_i)_{i \in I} \in [0, +\infty[^I$
↳ Théorème de sommation par paquet
Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de I. Alors

(u_i) est sommable
$\Updownarrow$
Chaque $(u_i)_{i \in I_n}$ est sommable et, notant $U_n = \sum_{i \in I_n} u_i$,

la série $\sum U_n$ est convergente

Dans ce cas $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$

D/ (⇑) Soit J fini $\subset I$. Chaque élément de J appartient à l'un des I_n.

J étant fini $\exists N \in \mathbb{N}$ $J \subset I_0 \cup \ldots \cup I_N$

il vient $J = \underbrace{(J \cap I_0) \cup \ldots \cup (J \cap I_N)}_{\text{2 à 2 disjoints}}$

$$\sum_{i\in J} u_i = \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in J\cap I_n} u_i\right) \leqslant \sum_{n=0}^{N} U_n \leqslant U = \sum_{0}^{+\infty} U_n < +\infty$$

il en résulte que (u_i) est sommable et $\sum_{i\in I} u_i \leqslant U$

$\Downarrow$ Si $J\subset I_n$, $J\subset I$ a fortiori, donc $\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$

et $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable. Soit $\varepsilon > 0$

pour chaque $n\in\mathbb{N}$, il existe J_n fini $\subset I_n$ tq

$$\sum_{i\in J_n} u_i \geqslant U_n - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Soit $N\in\mathbb{N}$ posons $J'_N = J_0\cup\ldots\cup J_N$, il vient

$$\sum_{i\in I} u_i \geqslant \sum_{i\in J'_N} u_i = \sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{i\in J_k} u_i\right) \geqslant U_0 + \ldots + U_n - \varepsilon\left(1+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{2^n}\right)$$

$$2\varepsilon + \sum_{i\in I} u_i \geqslant \sum_{k=0}^{N} U_k$$

~~ε arbitraire~~

ε arbitraire, on en déduit l'inég voulue

Applications :
Soit $(a_{mn}) \in \mathbb{R}^{+\mathbb{N}}$: Alors dans $[0,+\infty[$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{mn}\right) = \sum_{m\in\mathbb{N}}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{mn}\right)$$

ie { si l'une des sommes est infinie, l'autre aussi et (=)
{ ______ finie ______

D/ i) Si (a_{mn}) est sommable on envisage la partition suivante : $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$: $I_m = \mathbb{N}\times\{m\}$ $\forall m$

i) alors la famille $(a_{mn})_{m\in\mathbb{N}}$ est sommable

$\Rightarrow A_n = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{mn} < +\infty$

ii) La suite (A_n) est aussi sommable

Enfin $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{mn}$

On procède de même avec $J_m = \{m\}\times\mathbb{N}$ pour obtenir :

$B_m = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn} < +\infty$ et aussi $\sum B_m$ CV de somme A

Si (a_{mn}) non sommable, aucune des sommes est finie
(sinon ....)

II Familles de nombres complexes

~~Théo:~~ **Déf**: Soit $(z_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ on dit que $(z_i)_{i\in I}$ est sommable ~~est sommable~~ lorsque $(|z_i|)_{i\in I}$ est sommable

Prop: La famille $(z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable si les familles $Re(z_\lambda)^+, Re(z_\lambda)^-$ et $Im(z_\lambda)^+, Im(z_\lambda)^-$ le sont

Déf: Dans ce cas $\sum_{\lambda\in\Lambda} z_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} Re(z_\lambda)^+ - \sum_{\lambda\in\Lambda} Re(z_\lambda^-)$
$+ i\sum_{\lambda\in\Lambda} Im(z_\lambda)^+ \cancel{+i}\sum_{\lambda\in\Lambda} Im(z_\lambda)^-$

D/ ....

Prop: 1) Combinaisons linéaires
2) Linéarité de la somme

Partition: Soit I_n une partition de I, si $(z_\lambda)_{\lambda\in I}$ est sommable, chacune des sous familles $(z_\lambda)_{\lambda\in I_n}$ est sommable (somme Z_n), ainsi que la somme (Z_n) et l'on a $\sum_{\lambda\in\Lambda} z_\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} Z_n$

D/ On applique (I) à (z_λ) partie (I)

⚠ Il faut avoir vérifié la sommabilité de $|z_\lambda|_{\lambda\in\Lambda}$

Ex: $u_n = (-1)^n$ $I_m = \{2m+1, 2m\}$ $\sum_{n\in I_m} u_n = 0$ sommable

WRONG!!

100!

Applications : ① Séries doubles, si $(z_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable

les séries $\sum_{n\geq 0} z_{mn}$ sont ACV $\left(\xrightarrow[\Sigma]{} z_m\right)$

$\sum_{m\geq 0} z_{mn}$ sont ACV $\left(\xrightarrow[\Sigma]{} z'_n\right)$

Enfin $\boxed{\sum_{m=0}^{+\infty} z_m = \sum_{n=0}^{+\infty} z'_n}$

② Produit de deux séries

I) Soit (a_n), (b_p) deux séries sommables ($\sum a_n, \sum b_p$ ACV)

alors $(u_{np}) = (a_n b_p)$ est sommable de somme

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{p=0}^{+\infty} b_p$

D/ $|u_{np}| = |a_n||b_p|$ + Partition $I_p = \mathbb{N}\times\{p\}$

i) $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n||b_p|$ converge de somme $|b_p|\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n| = B_p$

ii) $\sum B_p$ converge à son tour car $\sum b_p$ est ACV

→ par partition de termes positifs $|a_n||b_p|$ est sommable

Partition Termes positifs

Attention

De là $\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}} u_{n,p} = \sum_{p\in\mathbb{N}}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_p\right)$

$= \sum_{p=0}^{+\infty}\left(b_p \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{p=0}^{+\infty} b_p\right)$

ii) Produit de convolution (ou de Cauchy)

$$(a_n)\times(b_n)=(c_p) \text{ où } c_p=\sum_{n+m=p} a_n b_m=\sum_{n=0}^{p} a_n b_{p-n}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n T^n\right)=\sum_{p=0}^{+\infty} c_p T^p$$

Prop: Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont ACV, $\sum c_p$ aussi et

$$\sum_{p=0}^{+\infty} c_p=\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

D/ Nouvelle partition de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$: $D_p=\{(m,n)\in\mathbb{N}^2 \mid m+n=p\}$

$$|c_p|=\left|\sum_{m+n=p} a_m b_n\right|\leq\sum_{(m,n)\in D_p}|a_m||b_n|=\delta_p$$

$(|a_m||b_n|)$ sommable + Partition (D_p) $\Rightarrow\sum \delta_p$ CV